

RELEVEMENT GEOMETRIQUE DE LA BASE CANONIQUE ET INVOLUTION DE SCHÜTZENBERGER

SOPHIE MORIER-GENOUD

RÉSUMÉ. Soit G un groupe de Lie complexe semisimple simplement connexe, et \mathcal{B}_V la base canonique d'un module de Weyl V de G . On calcule explicitement en terme de paramétrisation l'action du plus long élément du groupe de Weyl sur \mathcal{B}_V . On utilise pour cela les résultats de [3] sur le relèvement géométrique.

RÉSUMÉ. Let G be a complex simply connected semisimple Lie group, and let \mathcal{B}_V be the canonical base of a Weyl module V of G . We calculate explicitly the action of the longest element w_0 of the Weyl group on \mathcal{B}_V in terms of parametrizations. The method is based on results of [3] on the geometric lifting.

1. INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie complexe semisimple simplement connexe et B un sous groupe de Borel. L'algèbre R des fonctions régulières sur la variété de drapeau G/B est engendrée par une base dite base canonique duale, [7], qui possède des propriétés remarquables de compatibilités avec certaines filtrations. Cette base admet deux systèmes de paramétrisations, [3], la paramétrisation de Lusztig, et la paramétrisation en cordes. On introduit en 2.3, un morphisme Φ_λ qui, à un automorphisme de diagramme près, correspond à l'action de w_0 , où w_0 est l'élément de longueur maximale du groupe de Weyl. Ce morphisme Φ_λ préservant la base canonique, on cherche à l'exprimer en terme de paramétrisations. Le résultat obtenu généralise à tout groupe G et pour tout choix d'une décomposition réduite de w_0 le résultat de [2, §8]. Un résultat remarquable est que pour un choix particulier des paramétrisations, on obtient une expression affine. La combinatoire de la base canonique généralise celle des tableaux de Young. Dans cette généralisation, le résultat présenté peut-être vu comme un analogue de l'involution de Schützenberger. La méthode utilisée est celle du relèvement géométrique, objet introduit et utilisé dans une série d'articles, [1], [3], qui établit un lien entre les combinatoires de la base canonique et la géométrie de certaines variétés totalement positives. A l'aide de ce résultat, on montre dans [5] que l'on peut réaliser les cônes de Lusztig en termes de paramétrisations d'une partie de la base canonique. Une autre application de ce résultat concerne une généralisation de [4] et permet en particulier de fournir explicitement des dégénérescences semi-toriques pour les variétés de Richardson. Ces résultats sont plus largement développés dans [8].

2. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

2.1. Soit G un groupe de Lie complexe semisimple et simplement connexe. On fixe un tore T et un sous groupe de Borel B de G . Soit N le radical unipotent de B . On note B^- le sous groupe de Borel opposé et N^- son radical unipotent. On note respectivement \mathfrak{g} , \mathfrak{h} , \mathfrak{n} , \mathfrak{n}^- , les \mathbb{C} -algèbres de Lie de G , T , N , N^- . On a la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$. Soit $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base du système de racines correspondant à cette décomposition, n étant le rang de \mathfrak{g} . On note P le réseau des poids engendré par les poids fondamentaux ϖ_i , $1 \leq i \leq n$, et $P^+ := \sum_i \mathbb{N} \cdot \varpi_i$ le semigroupe des poids entiers dominants. La matrice de Cartan associée à \mathfrak{g} est notée $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. On désigne par W le groupe de Weyl, engendré par les réflexions s_i correspondant aux racines simples α_i . Un mot réduit pour $w \in W$ est une suite d'indices $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_l)$ telle que $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$, où $\ell(w) := \ell$ désigne la longueur de w . Soit w_0 l'unique élément de W de longueur maximale. On pose $N := \ell(w_0)$.

2.2. L'algèbre enveloppante de \mathfrak{g} , notée $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, est engendrée par les générateurs E_i , F_i , H_i , $1 \leq i \leq n$ et les relations de Serre. On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$, et \tilde{e}_i , \tilde{f}_i les opérateurs de Kashiwara, [7], [6]. Soit λ dans P^+ , on note $V(\lambda)$ le module de Weyl de plus haut poids λ et v_λ un vecteur de plus haut poids de $V(\lambda)$. On note $\mathcal{B}(\lambda) := V(\lambda) \cap \mathcal{B}$ qui est une base, dite canonique, de $V(\lambda)$. On désigne par v_λ^{low} le vecteur de $V(\lambda)$ de plus bas poids, appartenant à $\mathcal{B}(\lambda)$. Soit \mathbf{i} un mot réduit de w_0 . On adopte les notations de [3, §3], on note $b_{\mathbf{i}} : \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathcal{B}$ la bijection correspondant à la paramétrisation de Lusztig de la base canonique et $c_{\mathbf{i}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ la paramétrisation en cordes de la base \mathcal{B} . On pose $\mathcal{C}_{\mathbf{i}} := c_{\mathbf{i}}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda) := c_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}(\lambda))$. Pour deux mots réduits \mathbf{i} et \mathbf{i}' , on définit les applications de changement de paramétrisations $R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'} = (b_{\mathbf{i}'})^{-1} \circ b_{\mathbf{i}} : \mathbb{Z}_{\geq 0}^N \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ et $R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'} = c_{\mathbf{i}'} \circ (c_{\mathbf{i}})^{-1} : \mathcal{C}_{\mathbf{i}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{i}'}$.

2.3. Soit ω l'automorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ défini sur les générateurs par $\omega(E_i) = F_i$, $\omega(F_i) = E_i$, $\omega(H_i) = -H_i$. Pour tout $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -module V , soit V^ω le module tordu par l'action de ω , i.e comme espace vectoriel $V \simeq V^\omega$ et muni de l'action $u * v = \omega(u)v$, $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $v \in V$. Si V est un module simple, alors V^ω l'est aussi. Ainsi pour tout $\lambda \in P^+$, il existe un $\lambda^\omega \in P^+$ tel que $V(\lambda)^\omega$ est isomorphe à $V(\lambda^\omega)$. Il existe donc un isomorphisme Φ_λ d'espaces vectoriels entre $V(\lambda)$ et $V(\lambda^\omega)$ tel que $\Phi_\lambda(uv) = \omega(u)\Phi_\lambda(v)$, $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $v \in V(\lambda)$. Clairement, Φ_λ envoie un vecteur de plus haut poids sur un vecteur de plus bas poids. D'après le lemme de Schur, ce morphisme est unique à une constante multiplicative près. On peut choisir la constante pour avoir $\Phi_\lambda(v_\lambda) = v_{\lambda^\omega}^{low}$. Par [7, §21], on a les propriétés suivantes :

Proposition 2.1. *On a (i) $\lambda^\omega = -w_0(\lambda)$, (ii) $\Phi_\lambda(\mathcal{B}_\lambda) = \mathcal{B}_{\lambda^\omega}$, (iii) pour tout $1 \leq i \leq n$, $\Phi_\lambda \tilde{f}_i = \tilde{e}_i \Phi_\lambda$*

3. RELÈVEMENT GÉOMÉTRIQUE

Dans cette partie on s'intéresse au relèvement géométrique de l'application Φ_λ . En utilisant les résultats de [3], nous donnons une formule explicite pour l'application $b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda c_{\mathbf{i}}^{-1}$ qui donne la paramétrisation de Lusztig $t' =$

(t'_1, \dots, t'_N) de l'élément $\Phi_\lambda(b)$ en fonction de la paramétrisation en corde $t = (t_1, \dots, t_N)$ d'un élément b de la base canonique.

3.1. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $\varphi_i : SL_2 \hookrightarrow G$ l'injection canonique correspondant à la racine simple α_i . Pour $1 \leq i \leq n$, on considère les sous-groupes à un paramètre de G définis par

$$x_i(t) = \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_i(t) = \varphi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$t^{\alpha_i^\vee} = \varphi_i \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}^*$$

Les $x_i(t)$, (resp. $y_i(t)$, $t^{\alpha_i^\vee}$) engendrent N , (resp. N^-, H). On a les relations de commutation suivantes :

$$(3.1) \quad t^{\alpha_i^\vee} x_j(t') = x_j(t^{a_{ij}} t') t^{\alpha_i^\vee}, \quad t^{\alpha_i^\vee} y_j(t') = y_j(t^{-a_{ij}} t') t^{\alpha_i^\vee}$$

On définit deux antiautomorphismes involutifs de G , $x \mapsto x^T$, appelé transposition, et $x \mapsto x^\iota$, appelé inversion, par :

$$x_i(t)^T = y_i(t), \quad y_i(t)^T = x_i(t), \quad (t^{\alpha_i^\vee})^T = t^{\alpha_i^\vee}$$

$$x_i(t)^\iota = x_i(t), \quad y_i(t)^\iota = y_i(t), \quad (t^{\alpha_i^\vee})^\iota = t^{-\alpha_i^\vee}$$

Notons $G_0 := N^- H N$ l'ensemble des éléments de G qui admettent une décomposition (unique) gaussienne ; on écrira $x = [x]_- [x]_0 [x]_+$ pour $x \in G_0$.

Pour toute suite d'indices $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$ et tout m -uplet $t = (t_1, \dots, t_m)$ de \mathbb{C}^m , on note :

$$x_{\mathbf{i}}(t) := x_{i_1}(t_1) \cdots x_{i_m}(t_m), \quad \text{et} \quad x_{-\mathbf{i}}(t) := y_{i_1}(t_1) t_1^{-\alpha_{i_1}^\vee} \cdots y_{i_m}(t_m) t_m^{-\alpha_{i_m}^\vee}$$

D'après [2], les $x_{\mathbf{i}}$ et $x_{-\mathbf{i}}$ paramétrisent des sous variétés de G , et en particulier pour \mathbf{i} un mot réduit de w_0 , on a

Théoreme 3.1. *Il existe deux sous variétés de G , notées $L_{>0}^{e, w_0}$, resp. $L_{>0}^{w_0, e}$, telles que pour tout \mathbf{i} mot réduit de w_0 , l'application $x_{\mathbf{i}}$, resp. $x_{-\mathbf{i}}$, réalise une bijection de $\mathbb{R}_{>0}^N$ sur $L_{>0}^{e, w_0}$, resp. $L_{>0}^{w_0, e}$.*

On note $\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'} := x_{\mathbf{i}'}^{-1} \circ x_{\mathbf{i}}$ et $\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'} := x_{-\mathbf{i}'}^{-1} \circ x_{-\mathbf{i}}$ les applications de changement de paramétrisation. Un résultat important de [3] donne que ces applications relèvent géométriquement les applications $R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'}$ et $R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'}$ de changement de paramétrisation de la base canonique. Plus précisément, utilisant les résultats sur les semicorps de [1], on définit une transformation de "tropicalisation", notée $[\cdot]_{\text{Trop}}$. Brièvement, l'application $[\cdot]_{\text{Trop}}$ est une application entre le semicorps $\mathbb{Q}_{>0}(t_1, \dots, t_N)$ des *expressions rationnelles sans soustraction en t_1, \dots, t_N* et l'ensemble des applications de \mathbb{Z}^N dans \mathbb{Z} et qui consiste à remplacer la multiplication par l'addition, la division par la soustraction et l'addition par l'opération $a \oplus b := \min(a, b)$. On a d'après [3],

Théoreme 3.2. *Les composantes de $(\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'})^\vee$ et $(\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'})^\vee$ sont des expressions rationnelles sans soustraction, et*

$$(i) \quad [(\tilde{R}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'})^\vee(t)]_{\text{Trop}} = R_{\mathbf{i}}^{\mathbf{i}'}(t) \quad (ii) \quad [(\tilde{R}_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'})^\vee(t)]_{\text{Trop}} = R_{-\mathbf{i}}^{-\mathbf{i}'}(t)$$

La notation $(\cdot)^\vee$ signifie que l'on considère les formules analogues dans le dual de Langlands de G . On note aussi $[\cdot]_{\text{Trop}}$ l'application $[\cdot]_{\text{Trop}}$ appliquée sur chaque composante.

3.2. Soit $\zeta : L_{>0}^{w_0, e} \rightarrow L_{>0}^{e, w_0}$ définie par $\zeta(x) := [x'^T]_+$. En utilisant (3.1), on obtient aisément que l'application ζ est bien définie et plus précisément,

Proposition 3.3. *Soit $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ un mot réduit de w_0 , et $(t'_1, \dots, t'_N) = (x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}})(t_1, \dots, t_N)$. On a alors*

$$t'_k = t_k^{-1} \prod_{j>k} t_j^{-a_{i_j i_k}}$$

On peut maintenant donner la formule du relèvement géométrique de Φ_λ :

Théoreme 3.4. *Soit \mathbf{i} et \mathbf{i}' deux mots réduits de w_0 , alors les composantes $(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee$ sont des expressions rationnelles sans soustraction, et*

$$b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda c_{\mathbf{i}'}^{-1}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee(t)]_{\text{Trop}} + b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda(v_\lambda)$$

On pose $(l_1, \dots, l_N) := b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda(v_\lambda)$. Notons que ces constantes peuvent être données explicitement, [5]. On obtient alors la formule suivante :

Corollaire 3.5. *Pour $(t'_1, \dots, t'_N) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda c_{\mathbf{i}}^{-1}(t_1, \dots, t_N)$,*

$$t'_k = l_k - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j$$

Preuve : On fixe un poids λ dans P^+ . Soit $\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'} : \mathcal{C}_{\mathbf{i}}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}^N$ une famille d'applications indexée par deux mots réduits de w_0 vérifiant les trois conditions suivantes :

- (1) $\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'}(0, \dots, 0) = b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda(v_\lambda)$
- (2) $\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'} = R_{\mathbf{i}''}^{\mathbf{i}} \circ \Phi_{\mathbf{i}'', \mathbf{i}'} = \Phi_{\mathbf{i}'', \mathbf{i}'} \circ R_{-\mathbf{i}'}^{-\mathbf{i}''}$
- (3) Pour $\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'}(t_1, \dots, t_N) = (t'_1, \dots, t'_N)$, $t'_1 + t_1$ et t'_k , $k \neq 1$, sont des fonctions de t_2, \dots, t_N .

Le théorème est une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 3.6. *On a,*

- (i) *Si $(\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'})$ est une famille vérifiant les conditions (1), (2), (3), alors*

$$\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'} = b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda c_{\mathbf{i}'}^{-1}$$

- (ii) *La famille $(\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'})$ définie par*

$$\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'}(t) = [(x_{\mathbf{i}}^{-1} \circ \zeta \circ x_{-\mathbf{i}'})^\vee(t)]_{\text{Trop}} + b_{\mathbf{i}}^{-1} \Phi_\lambda(v_\lambda)$$

vérifie les conditions (1), (2), (3).

Preuve : Prouvons le point (ii). Remarquons que pour tout Q , expression rationnelle sans soustraction, $[Q]_{\text{Trop}}(0, \dots, 0) = 0$, (1) est clair. Utilisant 3.2 et 3.3 les points (2) et (3) sont clairs. Reste à montrer le point (i). Soit $(\Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'})$ une famille vérifiant les conditions (1), (2), (3), on peut définir des applications $F_{\mathbf{i}} : \mathcal{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ par $F_{\mathbf{i}}(b) = \Phi_{\mathbf{i}, \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b)$, $b \in \mathcal{B}(\lambda)$. Ces applications ne dépendent pas de \mathbf{i}' d'après (2). Montrons par induction sur le poids de b , que pour tout mot \mathbf{i} , $F_{\mathbf{i}}(b) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(\Phi_\lambda(b))$. Si $b = v_\lambda$, c'est clair d'après (1). Si $b = \tilde{f}_i(b')$, on peut choisir un mot réduit \mathbf{i}' commençant par i , $\mathbf{i}' = (i, i'_2, \dots, i'_N)$. On a $F_{\mathbf{i}'}(b) = \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(\tilde{f}_i(b')) = \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'}(c_{\mathbf{i}'}(b') + (1, 0, \dots, 0))$. Utilisant la condition (3) on a alors $\Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'}(c_{\mathbf{i}'}(b') + (1, 0, \dots, 0)) = \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'} \circ$

$c_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0)$. Ainsi $F_{\mathbf{i}'}(b) = \Phi_{\mathbf{i}', \mathbf{i}'} \circ c_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0) = F_{\mathbf{i}'}(b') - (1, 0, \dots, 0) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\Phi_\lambda(b')) - (1, 0, \dots, 0) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\tilde{e}_i \Phi_\lambda(b')) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\Phi_\lambda(\tilde{f}_i b')) = b_{\mathbf{i}'}^{-1}(\Phi_\lambda(b))$. Puis utilisant la condition (2), on a $F_{\mathbf{i}}(b) = b_{\mathbf{i}}^{-1}(\Phi_\lambda(b))$, pour tout mot réduit \mathbf{i} .

4. L'INVOLUTION DE SCHÜTZENBERGER

4.1. L'involution $i \mapsto i^*$ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ est définie par $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$. Pour une suite d'indice $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$, on pose $\mathbf{i}^* := (i_1^*, \dots, i_m^*)$. On note δ l'automorphisme défini sur les générateurs par,

$$\delta(E_i) = E_{i^*}, \quad \delta(F_i) = F_{i^*}, \quad \delta(H_i) = H_{i^*}$$

Comme en 2.3, pour λ dans P^+ , l'application δ induit un automorphisme de $V(\lambda)$ noté d_λ qui préserve la base canonique. De plus pour tout élément $b_{\mathbf{i}}(t)$ de $\mathcal{B}(\lambda)$, on a $d_\lambda(b_{\mathbf{i}}(t)) = b_{\mathbf{i}^*}(t)$.

L'application $\eta_\lambda := \Phi_\lambda \circ d_\lambda$ correspond à l'involution de Schützenberger.

4.2. Nous pouvons donner le relèvement géométrique de l'application η_λ . Soit \mathbf{i} un mot réduit de w_0 . On pose $(l_1, \dots, l_N) := b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_\lambda(v_\lambda)$.

Corollaire 4.1. *Soit $(t'_1, \dots, t'_N) = b_{\mathbf{i}^*}^{-1} \eta_\lambda(c_{\mathbf{i}}(t_1, \dots, t_N))$, alors*

$$t'_k = l_k - t_k - \sum_{j>k} a_{i_k i_j} t_j$$

RÉFÉRENCES

- [1] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky. Parametrization of Canonical Bases and Totally Positive Matrices Adv. Math., 122, (1996), 49-149.
- [2] A. Berenstein, A. Zelevinski. Canonical bases for the quantum group of type A_r , and piecewise-linear combinatorics. Duke Math., 143 (1996), 473-502.
- [3] A. Berenstein, A. Zelevinski. Tensor product multiplicities, Canonical bases and Totally positive varieties. Invent. Math., 82 (2001), 77-128.
- [4] P. Caldero. Toric degenerations of Schubert varieties. Transf. Groups, Vol. 7, No 1, 51-60, 2002.
- [5] P. Caldero, R. Marsh, S. Morier-Genoud. Realisation of the Lusztig's cone. preprint
- [6] M. Kashiwara. On Crystal Bases. Canad. Math. Soc., Conference Proceed., 16, (1995), 155-195.
- [7] G. Lusztig. Introduction to quantum groups. Progress in Mathematics, 110, Birkhäuser, 1993.
- [8] Sophie Morier-Genoud. Semi-toric degenerations of Richardson varieties, preprint.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I, 69622
VILLEURBANNE CEDEX, FRANCE

E-mail address: morier@igd.univ-lyon1.fr